

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа**

ФИЗИКА

**Физическая оптика.
Элементы квантовой физики
(факультативное задание)**

Задание № 6 для 11-х классов

(2014 – 2015 учебный год)



Долгопрудный, 2015

Составитель: А.А. Лукьянов, к. ф.-м. н., доцент, ведущий инженер лаборатории по работе с одарёнными детьми МФТИ.

Физика: задание №6 для 11-х классов (2014–2015 учебный год), 2015, 32с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 10 апреля 2015 г.

Учащийся должен стараться выполнять все задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалами они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:

Лукьянов Андрей Александрович

Подписано 20.02.15. Формат 60×90 1/16.

Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0

Уч.-изд. л. 1,72. Тираж 600. Заказ №47-з.

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа
ООО «Печатный салон «Шанс»

Институтский пер., г. Долгопрудный, 9, Москов. обл., 141700.

ЗФТШ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**,

тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение**,

тел. (499) 755-5580 – **очное отделение**.

E.mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

© ЗФТШ, 2015

Настоящее Задание с кратким изложением теории не претендует на то, чтобы заменить учебник по физике или обстоятельные учебные пособия [1 – 2]. Изложение теоретических вопросов в нём направлено лишь на то, чтобы нужным образом расставить ударения, отметить тонкие места в курсе, а главное – облегчить Читателю решение предлагаемых задач. Звездочкой (*) отмечены наиболее трудные (по мнению автора-составителя) примеры и задачи для самостоятельного решения.

§ 1. Интерференция и дифракция волн

А. Наложение двух или нескольких волн, при котором образуется устойчивое перераспределение в пространстве энергии результирующих колебаний, называют *интерференцией*. Наблюдать такую устойчивую картину можно, только тогда, когда разность фаз складывающихся колебаний в каждой точке пространства не зависит от времени. О таких волнах говорят, что они *когерентны*. Когерентные волны должны иметь одинаковую частоту (длину волны).

Если вдоль оси X распространяются две волны одинаковой природы (две волны на поверхности воды, две звуковые волны, две световые волны) $y_1(x, t) = A_1 \cos(\omega t - kx)$ и $y_2(x, t) = A_2 \cos(\omega t - kx + \delta)$, то в результирующей волне имеем $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$. Это не есть просто определение результирующей волны. Последняя формула выражает собой экспериментальный факт и называется *принципом суперпозиции*. Величину ω называют циклической частотой; она связана с обычной частотой ν (другое часто встречаемое обозначение f) и периодом колебаний T соотношением

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi f = 2\pi / T. \quad (1.1)$$

Величина k , называемая волновым числом, связана с длиной волны в среде λ аналогичным соотношением

$$k = 2\pi / \lambda. \quad (1.2)$$

В свою очередь, частота ν и длина волны λ связаны друг с другом и со скоростью v волн в среде соотношением

$$v \cdot T = v / \nu = \lambda. \quad (1.3)$$

При переходе волны из одной среды в другую частота остаётся неизменной – изменяются скорость распространения волны и длина волны. В случае электромагнитных волн (в частности, света) при переходе волны из вакуума в среде с показателем преломления n имеем:

$$v = c / n \quad (1.4)$$

где c – скорость света в вакууме (примерно 300 000 км/с),

$$\lambda = \frac{c / n}{\nu} = \frac{c / \nu}{n} = \frac{\lambda_0}{n}, \quad (1.5)$$

где λ_0 – длина электромагнитной волны в вакууме. К сожалению, индекс «0» часто опускают, и бывает непонятно, о какой длине волны говорят – в вакууме или в среде. В случае воздуха показатель преломления для электромагнитных волн в широком диапазоне частот близок к единице, поэтому величины λ_0 и λ также близки друг к другу. Впрочем, для радиоволн в ионосфере это уже не так.

Для расчёта фазы волны при прохождении в среде с показателем преломления n расстояния l вводят понятие оптической длины пути

$$l_{onm} = nl \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} y(l, t) &= A \cos(\omega t - kl) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} l\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} nl\right) = \\ &= A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} l_{onm}\right). \end{aligned}$$

Если две волны одинаковой частоты двигались в разных средах, то частота ω и длина волны λ_0 в вакууме у них будут одинаковыми; разность фаз $\Delta\varphi$ для волн может «набежать», однако, за счёт разных оптических длин:

$$\Delta\varphi = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} l_{onm1} - \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} l_{onm2}\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (l_{onm2} - l_{onm1}) \quad (1.7)$$

Обычные длины при этом могут быть равны друг другу.

В случае, например, звуковых волн или электромагнитных волн большой длины волны (радиодиапазон) построить разные источники волн, дающие когерентные друг с другом волны, сравнительно несложно. Ситуация не такая простая для электромагнитных волн видимого диапазона (длины волн порядка микрометра). Только с появлением лазеров ситуация упростилась. До этого чаще всего с помощью линз и зеркал делали два (или больше) мнимых источника света, каждый из которых был изображением некоего (одного и того же!) действительного источника света. (Редкое исключение – опыт Юнга с двумя щелями.) Именно то, что мнимые источники были изображениями одного и того же действительного источника, делало их когерентными почти автоматически. (К сожалению, даже в этом случае при большой разности оптических длин для мнимых источников когерентность разрушается.)

Интерференция света – одно из проявлений того, что свет представляет собой волновой процесс, в котором колеблются векторы напряжённости электрического и магнитного полей. Поскольку эти две величины в волне не независимы, но связаны друг с другом (неким соотношением), можно рассуждать о колебаниях, например, только напряжённости электрического поля:

$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx - \varphi_0)$. Интерференцию (и дифракцию) света учёные считают прямым доказательством того, что свет – это волна (или суперпозиция волн). Рассмотрение света в виде потока частиц (Ньютон) не смогло объяснить названных явлений.

Интерференция света наблюдается при наложении двух или нескольких световых пучков при условии когерентности волн. При этом интенсивность света в области перекрытия пучков имеет характер чередующихся светлых и тёмных полос, причём в максимумах интенсивность больше, а в минимумах – меньше суммы интенсивностей пучков. При использовании белого света интерференционные полосы оказываются окрашенными в различные цвета спектра. С интерференционными явлениями мы сталкиваемся довольно часто: цвета масляных пятен на асфальте, окраска замерзающих оконных стекол, рисунки на крыльях некоторых бабочек и жуков – всё это проявление интерференции света.

При сложении двух когерентных волн амплитуда в данной точке пространства будет максимальной, если колебания происходят синфазно (в точку одновременно приходят горбы двух волн или одновременно две впадины), и будет в данной точке минимальной, когда волны приходят в неё в противофазе (от одной из волн приходит горб, а от другой – впадина).

В световой волне видимого диапазона (от 0,4 до 0,8 мкм) напряжённость электрического поля колеблется с частотами порядка $(4 \div 8) \times 10^{14}$ 1/сек. Ни человеческий глаз, ни самые совершенные приборы не способны уследить за такими быстрыми изменениями поля световой волны. Все они реагируют на некие средние величины поля – средние за достаточно большой промежуток времени τ (много больший периода колебаний, $\tau \gg T$).

* Скажем об этом чуть подробнее. В математике под средним значением переменной величины $y(t)$ за время τ понимают величину

$$\bar{y} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} y(t) dt. \quad (1.8)$$

При этом среднее от константы равно самой этой константе:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} Const \cdot dt = Const \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt = Const \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \tau = Const. \text{ Для нас наибольший ин-}$$

терес представляют периодические функции. Среднее значение, например, косинуса (или синуса) будет близко к нулю. В самом деле,

$$\overline{\cos \omega t} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos \omega t \cdot dt = \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} = \frac{T}{\tau} \cdot \frac{\sin \omega \tau}{2\pi}, \text{ что при малом отношении}$$

T/τ есть малая величина. Однако среднее от квадрата косинуса уже не есть малая величина:

$$\begin{aligned} \overline{\cos^2 \omega t} &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau (1 + \cos 2\omega t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2\tau} \cdot \tau + \frac{1}{2\tau} \cdot \frac{\sin 2\omega\tau}{2\omega} = \frac{1}{2} + \frac{T}{\tau} \cdot \frac{\sin 2\omega\tau}{4\pi} \approx \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(вторым слагаемым пренебрегаем). В 1-м случае косинус одинаково часто принимает то положительные, то отрицательные значения, а в среднем – нуль. Квадрат же косинуса всегда не отрицателен, а площадь под кривой $y(t) = \cos^2 \omega t$ при $T \gg \tau$ равна примерно половине площади прямоугольника под прямой $y = 1$.

Счастливым образом наш глаз (и современные приборы) реагируют не на среднее поле в световой волне (оно равно нулю), а на среднее от квадрата поля, которое называют интенсивностью волны:

$$I = \overline{E^2}. \quad (1.9)$$

Среднему же от квадрата поля пропорциональны плотность энергии в волне и поток энергии в ней.

В случае интерференции двух волн $y_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ (например, $\varphi_1 = -kx_1 + \delta_1$) и $y_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ имеем: $\overline{y_1^2} = \frac{A_1^2}{2} \equiv I_1$,

$$\overline{y_2^2} = \frac{A_2^2}{2} \equiv I_2; \quad y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

для интенсивности в суммарной волне тогда получаем формулу:

$$\begin{aligned} I &= \overline{y^2(x, t)} = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + 2A_1A_2 \cdot \overline{\cos(\omega t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)} = \\ &= I_1 + I_2 + \sqrt{2I_1} \cdot \sqrt{2I_2} \cdot \overline{(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2))} = \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Если $\varphi_1 = -kx_1$ и $\varphi_2 = -kx_2$, то

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cdot \cos k\Delta, \quad (1.10)$$

где $\Delta = |x_1 - x_2|$ – так называемая разность хода. В более общем случае, когда две волны приходят в точку, пройдя по средам с разными показателями

преломления, волновые числа k будут разными, – и требуется рассчитывать разность оптических длин. *

Пример 1.1. Две антенны A и B излучают радиоволны на частоте $f = 3$ МГц в фазе друг с другом. Расстояние между ними $|AB| = L = 200$ м. На каком минимальном расстоянии $l = |BC|$ интенсивность сигнала минимальна, если $BC \perp AB$. Ослаблением сигналов при удалении от станций пренебречь.

Решение. $\lambda = cf = 100$ м. Чтобы в точке C наблюдался интерференционный минимум, нужно, чтобы сигналы от антенн в эту точку приходили в противофазе (от одной антенны приходил «горб», а от другой «впадина»), т. е. разность расстояний от антенн до т. C должно равняться полуцелому числу длин волн излучения: $\sqrt{L^2 + l^2} - l = (m + \frac{1}{2})\lambda$ ($m \geq 0$). С учётом равенства

$L = 2\lambda$ получаем $l = \left(\frac{4}{2m+1} - \frac{2m+1}{4}\right)\lambda$. В силу положительности длины $l > 0$ имеем $4 > 2m+1$, или $m < 3/2$, т. е. возможные значения m : 0 и 1. В первом случае $l = 3,74\lambda = 375$ м, при $m = 1$ получаем меньшее значение $l = \frac{7}{12}\lambda \approx 58$ м.

(*) **Пример 1.2.** «Просветление оптики». Во многих оптических приборах для уменьшения потерь на отражение поверхности линз покрывают тонкой плёнкой фторида магния (MgF_2), показатель преломления которого $n_2 = 1,38$ (показатель преломления стекла $n_3 = 1,50$). Пусть на стекло перпендикулярно поверхности падает видимый свет с длиной волны $\lambda = 0,550$ мкм. При какой минимальной толщине L покрытия отражение света вследствие интерференции волн резко ослабнет?

Решение. Отраженный свет ослабляется вследствие интерференции волн – волны, отраженной от наружной поверхности пленки (1), и волны, отраженной от поверхности стекла и затем вышедшей из пленки (2) (рис.1). (Наклонное падение изображено для того, чтобы избежать наложения друг на друга разных линий.)

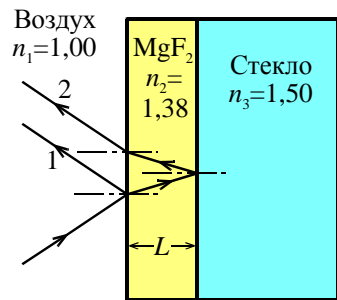


Рис. 1

Разность оптических длин в этом случае равна $2Ln_2$ (множитель «2» появился из-за того, что свету, прежде чем выйти из пленки, нужно пройти до стекла и обратно). Для ослабления волн, необходимо, чтобы на выходе из пленки разность фаз равнялась π плюс число, кратное 2π . На языке длин волн это означает:

$$2Ln_2 = \lambda/2 + m\lambda.$$

В данном примере длина волны $\lambda = 0,550$ мкм – это длина волны в вакууме или в воздухе (то, что раньше обозначалось как λ_0 : длина волны в стекле при этом буде равна $\lambda/(1,5)$), а в пленке фторида магния – $\lambda/(1,38)$.

Отсюда получаем $L_{\min} = \frac{\lambda}{4n_2} \approx 99,6$ нм (для сравнения: характерный размер большинства атомов порядка 0,1 нм).

Замечание 1. Нами **не** было доказано, что амплитуда волны, вышедшей из пленки (но дошедшей сначала до стекла и отразившейся), равна амплитуде волны, сразу отраженной от пленки. Для того чтобы две волны погасили друг друга, необходимо, чтобы они были в противофазе (это мы учили), но нужно ещё, чтобы их амплитуды были равны друг другу. Последнее, однако, не было доказано (это выходит за рамки школьной физики).

Замечание 2. Оказывается, что при отражении от оптически более плотной среды, происходит скачкообразное изменение фазы волны на π . Доказательство этого также выходит за рамки школьной программы. К счастью, в данном примере обе волны отражались от оптически более плотной среды, и каждая из них получила сдвиг по фазе на одно и то же значение π .

Замечание 3. Корректный расчет требует рассмотрения многократных отражений волны, прошедшей в пленку. Эта волна, дойдя до стекла, частично отразится, но частично пройдет в него (для целей просветления оптики нужно, конечно, чтобы проходило как можно больше света). Отразившаяся от стекла волна лишь частично выйдет наружу: частично она отразится от внутренней поверхности пленки и направится снова к стеклу и т. д. *

Б. Явление **дифракции** волн (не обязательно – только световых) есть проявление интерференции вторичных волн от воображаемых источников, расположенных на волновых фронтах в любые предыдущие моменты времени

(**принцип Гюйенса-Френеля**). Гюйгенс впервые стал рассуждать о вторичных источниках волн, Френель же впервые применил к ним соображения интерференции волн. Разумеется, интерференция волн от бесконечного числа воображаемых источников – совсем не простая вещь, а теория этого явления есть сложная математическая теория, – сложнее, чем теория интерференции волн всего от двух источников! Тем более удивительно, что для практически важного оптического прибора, **дифракционной решётки**, можно написать простую формулу для положения главных максимумов.

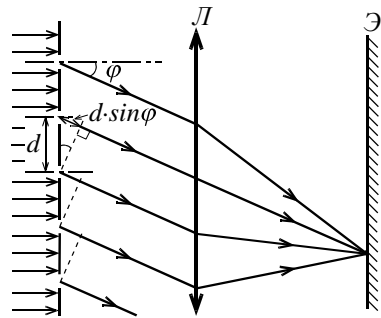


Рис. 2

Пусть на дифракционную решётку в виде плоскости с многочисленными регулярно изготовленными параллельными друг другу щелями перпендикулярно решётке падает свет с длиной волны λ . За решёткой параллельно решётке ставят линзу, в фокальной плоскости которой помещают экран, параллельный плоскости решётки (рис.2). Каждая щель представляет собой источник вторичных волн. На экране видят сложную картину, состоящую из очень узких полос (тем уже, чем больше штрихов N у решётки). Некоторые из полос будут очень яркими (главные максимумы), некоторые слабо заметными, будут и тёмные полосы. Направления на главные максимумы определяются формулой

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad (1.11)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – так называемый порядок дифракции, d – период решётки (не ширина щелей!). Зная период решетки d и измеряя угол φ на m -й главный максимум, можно определить длину волны. Бывает и наоборот: зная длину волны света, находят период решётки.

Чем больше щелей содержит решётка, тем более узкими будут главные максимумы. Угловое расстояние между соседними темными полосами (эта величина совпадает с шириной главных максимумов) равна

$$\delta\varphi = \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi}, \quad (1.12)$$

где φ даёт направление на соответствующий максимум в дифракционной картине. Узость дифракционных максимумов от дифракционной решётки позволяет использовать её в качестве спектрального прибора. Пусть на решётку последовательно падал свет, например, жёлтого цвета, но с двумя слегка разными длинами волн. На глаз мы можем порой и не сказать, отличаются эти два жёлтых цвета друг от друга или нет. Но положения их дифракционных максимумов будут существенно разными, а вследствие узости полос – легко отличимыми друг от друга.

Пример 1.3. Для излучения некоторой длины волны дифракционный максимум первого порядка наблюдается под углом $\varphi_1 = 8,5^\circ$. Какой угол дифракции соответствует последнему максимуму для той же длины волны?

Решение. Пусть m – последний порядок дифракции. Согласно (1.11) имеем систему двух уравнений $d \sin \varphi_m = m\lambda$ (*) и $d \sin \varphi_1 = \lambda$ (**). Деля одно уравнение на другое (при этом сокращаются неизвестные величины – период решетки d и длина волны λ), получаем $\sin \varphi_m = m \sin \varphi_1$ (***). Последний порядок дифракции m определится из условия $|\sin \varphi_m| \leq 1$ отсюда находим

$|m| \leq \frac{1}{\sin \varphi_1} \approx 6,8$, или с учетом целочисленности m : $|m| \leq 6$. Тогда в силу

(***) : $\sin \varphi_6 = 6 \sin 8,5^\circ \approx 0,887$, а сам угол $\varphi_6 \approx 62,5^\circ$.

(*) **Пример 1.4.** Линии в спектре водорода имеют длину волны $\lambda_1 = 656,45$ нм, а дейтерия – $\lambda_2 = 656,72$ нм. Какое число штрихов должна иметь дифракционная решётка, чтобы эти линии в спектре 3-го порядка были различимы?

Решение. Из условия (1.11) $d \sin \varphi = m\lambda$ при $m = 3$ находим угловое расстояние между главными максимумами $\Delta\varphi$ для разных длин волн:

$d \cdot \cos \varphi \cdot \Delta\varphi = 3(\lambda_2 - \lambda_1)$, или $\Delta\varphi = \frac{3(\lambda_2 - \lambda_1)}{d \cdot \cos \varphi}$. Для того чтобы линии были

различимы, угловое расстояние между полосами одного и того же порядка, но для разных длин волн, должно быть, очевидно, не меньше ширины самих

полос $\delta\varphi = \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi}$ (1.12), то есть $\frac{3(\lambda_2 - \lambda_1)}{d \cdot \cos \varphi} \geq \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi}$. Отсюда получим

$N \geq \frac{\lambda}{3(\lambda_2 - \lambda_1)}$. В качестве λ здесь возьмём среднее арифметическое для

двух близких длин волн. В итоге получаем: $N \geq 810,60$, то есть $N_{\min} = 811$.

Заметим, что в ответ не вошёл период решётки (не заданный в условии задачи). Неопределённым оказался и угол φ , соответствующий 3-му порядку в дифракционной картине. Эти величины просто сократились в процессе вычислений.*

§2. Кванты энергии Планка

Начиная с конца XVII века, в физике сосуществовали, грубо говоря, два представления о свете – как о потоке неких частиц (*корпускулярная* теория Ньютона) и как о некоем *волновом* процессе (Гюйгенс). У каждого из представлений были свои достоинства и недостатки, свои сторонники и противники. Весь XVIII век шли споры между сторонниками двух теорий. К началу XIX века трудами прежде всего Юнга и Френеля победу стала одерживать волновая теория, естественным образом объяснившая явления интерференции и дифракции. «Естественным» – не значит «лёгким», «элементарным». Добавим к этому, что Юнг и Френель, строго говоря, рассуждали о непонятном волновом процессе (ими не было понято, что именно колеблется в световой волне). Лишь в 60-е годы XIX века появилась теория электромагнетизма Максвелла и его же электромагнитная теория света, по которой в световой волне колеблются векторы напряжённости электрического и магнитного полей. Теория Максвелла окончательно утвердилась в статусе **теории**, а не гипотезы, после опытов Герца (в конце XIX в.).

Макс Планк был ярким сторонником электромагнитной теории Максвелла и его теории света, в частности. Когда он приступил к изучению так называемого «*излучения абсолютно чёрного тела*» (АЧТ), он не мог и предвидеть, чем это закончится. Речь идёт об электромагнитном излучении, всегда существующем внутри любой полости. Если оно выходит из него через малое отверстие, говорят об «излучении абсолютно чёрного тела».

Для вывода некоей формулы (спектра излучения АЧТ) Планку в 1900 г. пришлось сделать революционный шаг – предположить, что поглощение и испускание энергии происходит **не непрерывно**, но некими минимальными порциями, **квантами**. Планк представлял себе стенки полости как набор неких гармонических осцилляторов с разными частотами. Современных представлений об атомном строении вещества тогда ещё не было. Но Планку и другим физикам удалось доказать, что от конкретной модели вещества выводы не зависят, поэтому в рассуждениях можно пользоваться любой удобной моделью.

Для вывода некоей важной формулы, согласующейся с экспериментом (это было существенно!), Планку пришлось предположить, что осциллятор с частотой ν может иметь **не любые** значения энергии из непрерывного набора значений энергии, но лишь **вполне определённые (дискретные) значения**, даваемые формулой

$$E_n = (n + 1/2)h\nu, \quad (2.1)$$

которая теперь носит имя Планка, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, ν – частота колебаний, h – константа, носящая ныне имя Планка. По современным измерениям $h \approx 6,63 \times 10^{-34}$ Дж·с.

Для Планка идея квантов была актом отчаяния. Он долгое время считал, что это – лишь предположение, упрощающее вывод формул, и что со временем можно будет вывести формулы из классических соображений (без всяких скачков по энергии). В последующие годы он сделал несколько попыток такого вывода, но все они оказались безуспешными. Идею квантов с большим воодушевлением подхватили другие физики (Бор, Гейзенберг, Паули, Дирак), чьими трудами и было построено здание квантовой теории.

Пример 2.1. Почему в обыденной жизни мы не чувствуем квантования энергии? Представим шарик массой $m = 10$ г, колеблющийся на пружинке. Пусть шарiku, первоначально покоившемуся в положении равновесия, сообщили скорость $v_0 = 10$ см/с, и максимальное его отклонение от положения равновесия составило $A = 10$ см. 1) Оцените какому числу n квантов соответствует энергия шарика. 2) На сколько надо увеличить скорость шарика v_0 , чтобы увеличение энергии составило один квант энергии, т. е. $\Delta E = h\nu$?

Решение. Число n можно найти по формуле для полной энергии $\frac{mv_0^2}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu$, откуда $n = \frac{mv_0^2}{2h\nu} - \frac{1}{2} \approx \frac{mv_0^2}{2h\nu}$. (Мы пренебрегли «1/2» т. к. вскоре убедимся, что первое слагаемое чрезвычайно велико.) Частоту найдём по формуле $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$, где k – коэффициент жесткости пружины. Последний опре-

делился бы из закона сохранения энергии: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$. Мы не станем искать k , а найдём сразу частоту $\nu = 1/2 \pi \approx 0,16$ Гц. Тогда для n получаем чудовищно большое число $n \approx 5 \times 10^{29}$. С чем можно сравнить его? Например, в одном кубометре воды содержится примерно 3×10^{28} молекул воды, т. е. на порядок меньше. Но когда мы отливаем воду даже очень малыми порциями, мы вовсе не задумываемся о точном числе «отлитых» молекул. Долгое время люди вообще не знали о том, что вещества состоят из молекул и атомов. Вода казалась непрерывной субстанцией. Считалось, что можно отлить сколь угодно малую часть воды. Теперь мы знаем, что не можем отлить менее одной молекулы воды. Но это нас нисколько не смущает: мы никогда и не отливаем 3, 100 или даже миллион молекул. Мы всегда отливаем значительно большее число молекул. В капле воды радиусом 1 мм содержится $1,4 \times 10^{20}$ молекул. Думать, что мы можем проконтролировать убыль или прибавление числа молекул воды в её кубометре даже на миллиард – чистая фантазия. Говорить о «кванте» воды (о молекуле) в обыденной жизни, конечно, можно, но большинство людей спокойно без этого обходятся.

Точно так же люди долгое время не подозревали ни о каком квантовании энергии. В обычной механике энергию всегда считали непрерывной величиной. Добавление шарика на пружинке даже малой (по обыденным меркам) порции энергии означает увеличение числа n сразу на огромное значение.

Чтобы ответить на второй вопрос в задаче, запишем формулу для приращения энергии гармонического осциллятора при увеличении квантового числа n на единицу:

$$\begin{aligned} h\left(n+1+\frac{1}{2}\right)\nu - h\left(n+\frac{1}{2}\right)\nu &= h\nu = \frac{m}{2}\left((v_0 + \Delta v_0)^2 - v_0^2\right) = \\ &= m\left(v_0 \cdot \Delta v_0 + \frac{(\Delta v_0)^2}{2}\right) \approx mv_0 \cdot \Delta v_0, \end{aligned}$$

откуда получаем $\Delta v_0 = \frac{h\nu}{mv_0} = \frac{hv_0 / (2\pi A)}{mv_0} = \frac{h}{2\pi mA} = \frac{\hbar}{mA} \approx 10^{-31}$ м/с, где

$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,06 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Понятно, что с такой точностью задать начальную скорость (чтобы она отвечала строго определённом числу n) для обычного шарика на пружинке не представляется возможным. Ситуация, однако, меняется при переходе к миру атомов. У электрона, например, масса

$m = 0,9 \times 10^{-30}$ кг и характерные амплитуды A его движения (порядка 10^{-10} м) чрезвычайно малы. Поэтому по формуле $\Delta v_0 = \frac{\hbar}{mA}$ мы получаем **не** маленькое изменение начальной скорости – порядка 10^6 м/с.

§3. Фотоэффект. Фотоны

Вырывание электронов из вещества под действием света (электромагнитного излучения) называют фотоэлектрическим эффектом (или просто – фотоэффектом, но есть и более точное название «внешний фотоэлектрический эффект»), подчеркивающее, что электроны вырываются наружу). Для изучения фотоэффекта используют вакуумную лампу, включённую по схеме на рис. 3, с холодным катодом (при этом можно пренебречь термоэмиссией электронов). Облучая катод светом определённой частоты и интенсивности, строят зависимость силы тока от напряжения между катодом и анодом (говорят: снимают вольтамперную характеристику лампы.) Типичная кривая из тех, которые при этом получают, показана на рис. 4.

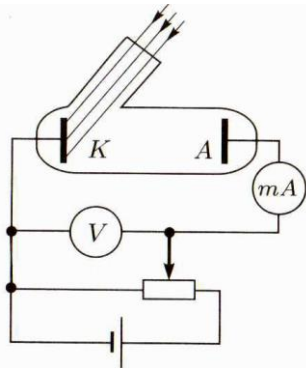


Рис. 3

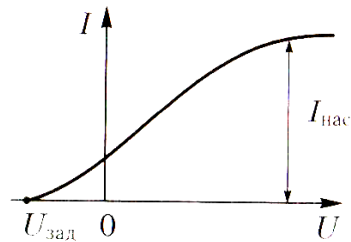


Рис. 4

Что же оказалось необъяснимым электродинамикой Максвелла в фотоэффекте? Понятно, что электрический ток будет тем больше, чем большее число электронов будет вырвано из катода. Ясно, что чем больше интенсивность света, тем больше будет таких электронов. Это, можно сказать, видели (ток насыщения $I_{\text{нас}}$ растёт при увеличении интенсивности света). Но возникли неприятности. Если на анод подать отрицательный по отношению к катоду потенциал, то в лампе возникнет задерживающее электроны электрическое поле. При этом не все электроны, вылетевшие с катода, смогут достичь анода и дать ток. Мяч, брошенный вверх, вскоре упадет вниз. Он может и не долететь до 10-го этажа. Мячу для этого нужно сообщить достаточно большую скорость. Чтобы электроны достигли анода, они при вылете из катода тоже должны (при

«минусе» на аноде) иметь достаточно большую скорость, т. е. большую кинетическую энергию. Ожидалось, что эта энергия будет пропорциональна интенсивности света (квадрату напряженности электрического поля в волне, которое, как считалось, разгоняет электроны). На опыте такой закономерности **не** обнаружили. Видели другое: энергия электронов, вырванных светом из катода, увеличивается **не** с ростом интенсивности, а с ростом частоты света. Причём, чем меньше частота, тем меньшее задерживающее поле на аноде надо прикладывать, чтобы прекратился ток. А при частотах, меньших некоторой (разной для разных веществ), электроны вообще нельзя вырвать из катода (при этом говорят о «красной границе фотоэффекта»).

Эйнштейн в 1905 г. весьма элегантно объяснил фотоэффект, предположив, что свет частоты ν , падающий на катод, представляет собой поток частиц, каждой из которых он приписал (в духе формулы Планка) энергию $\mathcal{E} = h\nu$. Позже эти частицы назвали **фотонами**. Когда какой-нибудь из фотонов достигает катода, он встречает какой-нибудь электрон катода. Фотон может быть **мгновенно** поглощен этим электроном. Энергия $h\nu$ в результате переходит к электрону, и у электрона появляется возможность преодолеть силы, удерживающие его в катоде. При этом, правда, расходуется часть приобретённой энергии на совершение работы A против удерживающих сил (говорят о **работе выхода электрона**). В итоге кинетическая энергия вылетевших электронов оказывается равной

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - A. \quad (3.1)$$

Эту формулу называют формулой Эйнштейна для фотоэффекта. (**Уточнение.** Формула (3.1) даёт максимальную энергию вылетевших электронов. Если электрон поглотит фотон не у самой поверхности катода, то он по дороге к поверхности может растерять часть энергии. В результате его энергия на выходе из катода будет меньше, чем $h\nu - A$. А вот набрать по дороге энергию за счёт столкновений с другими электронами ему будет, оказывается, весьма затруднительно. Но в этом физики разобрались чуть позже.)

В конце концов, именно с формулировкой «за работы по фотоэффекту и другие работы по теоретической физике» Эйнштейн получил Нобелевскую премию по физике. Но это было уже в 1925 г. Не надо думать, что все физики тут же с восторгом ухватились за идею Эйнштейна, что свет есть поток частиц (фотонов). Родоначальник теории квантов, Планк, представляя Эйнштейна Берлинской академии наук, говорил примерно так: «Не будьте слишком строги к нашему молодому коллеге за то, что он иногда говорит о свете как о потоке частиц». К тому же, какую частоту мы приписываем частице? Частоту колебаний **чего?** Эйнштейн осознавал эту трудность. Он понимал, что представление света в виде потока фотонов – не просто возврат к корпускулярной теории света Ньютона. В том же 1905 г. вышла его основополагающая статья по теории

относительности, которая называлась «К электродинамике движущихся сред», в которой он был ... последовательным сторонником электродинамики Максвелла (с его электромагнитной природой света). Эйнштейн (и другие физики) сознавал, что тогдашняя картина мира – временная, и не всё физикам в ней пока до конца понятно. Эта ситуация в физике получила название **корпускулярно-волнового дуализма** (двойственности) для света: при трактовке фотоэффекта свет удобно считать потоком частиц; при объяснении явлений интерференции и дифракции – волновым процессом.

Но и просто распространение света часто удобно рассматривать как поток частиц. Например, при распространении световой волны большой интенсивности вдоль прямой (луч) можно, как и в случае газа, говорить о средней концентрации n частиц (фотонов) в единице объема, о плотности потока nc этих частиц (количестве частиц, пересекающих поверхность площадью 1 м^2 за одну секунду перпендикулярно поверхности; считаем, что все фотоны движутся со скоростью света в вакууме c), о плотности энергии в световой волне $w = n \times h\nu$, о плотности потока энергии в световой волне $I = nc \times h\nu$.

Простую трактовку при этом получает и такое сложное явление, как давление света, падающего на поверхность (экспериментально открытое нашим соотечественником Лебедевым). Дело в том, что согласно теории относительности, частицам, движущимся со скоростью света, следует приписать нулевую массу, но отличный от нуля импульс $p = \mathcal{E}/c = h\nu/c = h/\lambda$. Для световой волны с частотой ν имеем тогда плотность потока импульса $nc \times (h\nu/c) = nh\nu$, что в точности совпадает с плотностью энергии фотонного газа.

Если все фотоны поглощаются поверхностью (*черная поверхность*), то импульс всех этих фотонов передается поверхности. Если 1 м^2 поверхности за 1 с поглощает от фотонов $nh\nu$ импульса перпендикулярного поверхности, то по формуле закона Ньютона $\Delta p / \Delta t = F$ это и есть сила со стороны фотонов, действующая на поверхность. Однако раз речь идёт об 1 м^2 , значит, величина $nh\nu$ совпадает с давлением. Если все фотоны отражаются от поверхности (как от *зеркала*), то модуль изменения импульса каждого из фотонов Δp_1 будет в 2 раза больше, чем при поглощении: $2h\nu/c$ ($\Delta p_1 = p_{\text{отраж}} - p_{\text{падающ}} = -h\nu/c - h\nu/c$). Соответственно, давление света на зеркальную поверхность будет равно уже $2nh\nu$.

Пример 3.1. На катод фотоэлемента падает световой поток мощностью $P = 0,02 \text{ Вт}$. На каждые $n = 10$ квантов света, упавших на катод, в среднем приходится один выбитый фотозлектрон. Определить силу тока насыщения фотоэлемента. Длина волны света $\lambda = 2 \times 10^{-7} \text{ м}$.

Решение. Пусть \dot{N}_e – число электронов выбиваемых с фотокатода в единицу времени. В условиях насыщения все электроны, вырванные из катода, достигают анода, т. е. все вносят вклад в ток. Поэтому сила тока $I = e\dot{N}_e$, где $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ Кл}$ – элементарный заряд. Формулу для силы тока перепишем в

виде $I = e\dot{N}_{ph} / n$ (где $n = 10$), выразив её через число фотонов \dot{N}_{ph} , падающих каждую секунду на катод. Последнее число связано с мощностью светового потока $\dot{N}_{ph} = \frac{P}{\varepsilon_{ph}} = \frac{P}{hc/\lambda} \approx 2 \times 10^{16}$ 1/с. Тогда $\dot{N}_e \approx 2 \times 10^{15}$ 1/с и окончательно $I \approx 0,3$ мА.

Пример 3.2. Катод фотоэлемента освещается монохроматическим светом. При задерживающем напряжении между катодом и анодом $U_1 = 1,6$ В ток в цепи прекращается. При изменении длины волны света в $k = 1,5$ раза потребовалось подать задерживающую разность потенциалов $U_2 = 3$ В. Определить работу выхода электрона из материала катода.

Решение. Пусть A – искомая работа выхода. Задерживающее напряжение определяется условием, что электроны, вылетающие с катода с ненулевой скоростью ($\lambda < \lambda_{max}$), тормозясь электрическим полем лампы, но долетев до анода, теряют всю свою кинетическую энергию, – она переходит в потенциальную: $\frac{mV^2}{2} = -e(-U)$ (1). Запишем для двух длин волн света формулу Эйнштейна для

фотоэффекта: $\frac{hc}{\lambda_1} = A + eU_1$ (2) и $\frac{hc}{\lambda_2} = A + eU_2$ (3). Меньшей длине волны

фотонов соответствует большая их энергия $\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, большая энергия электронов, вылетающих с фотокатода и, соответственно, большее запирающее напряжение: $\frac{hc}{2\lambda_1/3} = A + eU_2$ (3'), или еще иначе $\frac{hc}{\lambda_1} = \frac{2}{3}A + \frac{2}{3}eU_2$ (3'').

Вычитая последнее равенство из уравнения (2), получаем $A = e(2U_2 - 3U_1) = e \times 1,2$ В = 1,2 эВ.

(*) **Пример 3.3.** Излучение аргонного лазера с длиной волны $\lambda = 500$ нм сфокусировано на плоском фотокатоде в пятно диаметром $d = 0,1$ мм. Работа выхода фотокатода $A = 2$ эВ. На анод, расположенный на расстоянии $l = 30$ мм от катода, подано ускоряющее напряжение $U = 4$ кВ. Найти диаметр пятна фотоэлектронов на аноде. Анод считать плоским и расположенным параллельно поверхности катода.

Решение. Диаметр пятна D на аноде задают электроны, которые вылетают с катода почти парал-

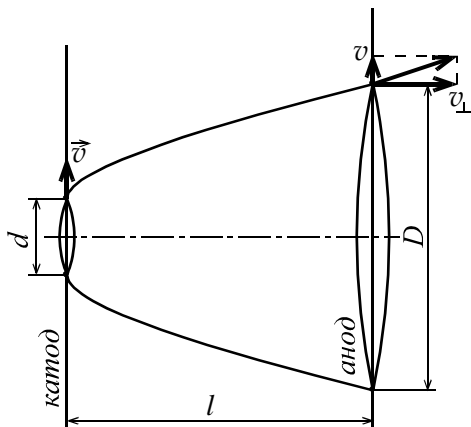


Рис. 5

тельно поверхности катода (см. рис.5): $D = d + 2v\tau$, где v – максимальная скорость электронов, вылетающих с фотокатода, τ – время пролёта электронами расстояния между катодом и анодом. Скорость найдём из формулы Эйнштейна для фотоэффекта $\frac{mv^2}{2} = h\frac{c}{\lambda} - A$, откуда $v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(h\frac{c}{\lambda} - A\right)} \approx 4,13 \cdot 10^5$ м/с. Эта скорость много меньше скорости света в вакууме c , поэтому нет необходимости пользоваться сложными формулами теории относительности. (На самом деле, нужно будет ещё проверить, что и скорость электрона вблизи анода будет много меньше, чем c , что мы сделаем в конце.)

Время τ найдём из формулы для равноускоренного движения $l = \frac{a\tau^2}{2}$, где по 2-му закону Ньютона для электрона в постоянном и однородном электрическом поле: $a = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{ml} \approx 2,34 \cdot 10^{16}$ м/с². (Обратите внимание на порядок величины ускорения электрона! Во сколько раз оно больше ускорения свободного падения!) Подстановка этого значения в формулу для времени $\tau = \sqrt{\frac{2l}{a}}$ даёт $\tau \approx 1,60 \cdot 10^{-9}$ с.

Окончательно для диаметра пятна на аноде получаем $D \approx 1,42$ мм.

Проверим ещё, не разгоняются ли электроны электрическим полем до скоростей, близких к скорости света. Двигаясь ускоренно, электрон перед подлетом к аноду приобретет компоненту скорости, перпендикулярную аноду, равную $v_{\perp} = a\tau \approx 3,74 \cdot 10^7$ м/с. Компонента скорости, параллельная аноду, будет такой же, как при вылете из катода, и т. к. она много меньше, чем v_{\perp} , то электроны будут подлетать к аноду почти перпендикулярно ему со скоростью равной примерно $v_{\perp} \approx 3,74 \cdot 10^7$ м/с. Это – совсем не маленькая скорость. Всё же она оставляет лишь 12,5% от скорости света в вакууме.*

Пример 3.4. Чувствительность сетчатки глаза человека к желтому свету ($\lambda = 0,6$ мкм) составляет $P = 2 \times 10^{-18}$ Вт. Сколько фотонов должно ежесекундно поглощаться сетчаткой, чтобы создавалось ощущение восприятия света?

Решение. Пусть \dot{N} – искомое число фотонов. Тогда количество энергии, поглощаемое в единицу времени сетчаткой глаза, равно $P = h\nu \cdot \dot{N} = h\frac{c}{\lambda} \cdot \dot{N}$. От-

сюда получаем $\dot{N} = \frac{P\lambda}{hc} = 6$ фотонов в одну секунду.

Пример 3.5. Солнечная батарея космической станции площадью $S = 50 \text{ м}^2$ ориентирована перпендикулярно направлению на Солнце. Она отражает половину падающего на неё солнечного излучения. Чему равна сила давления (в мкН) излучения на батарею, если мощность излучения, падающего на 1 м^2 поверхности, равна $I = 1,4 \text{ кВт}$?

Решение. Изменение импульса одного отражённого фотона равно $\Delta p_{\text{отраж}} = p_{\text{отраж}} - p_{\text{пад}} = (-p) - p = -2p$, где $p = h/\lambda = h\nu/c$ – импульс падающего на поверхность фотона. Пусть на всю поверхность батареи перпендикулярно поверхности каждую секунду ($\Delta t = 1 \text{ с}$) падает \dot{N} фотонов. Изменение импульса всех $\dot{N}/2$ отражённых фотонов равно $\Delta p = -2p \cdot \dot{N}/2 = -p \cdot \dot{N}$. Это изменение импульса по 2-му закону Ньютона вызывается силой равной $f_1 = \Delta p / \Delta t = -(h\nu/c)\dot{N}$ со стороны батареи. Тогда по 3-му закону Ньютона отражённые фотоны действуют на батарею с силой $F_1 = (h\nu/c)\dot{N}$.

Аналогично для поглощённых $\dot{N}/2$ фотонов. Изменение импульса одного поглощённого фотона равно $\Delta p_{\text{поглощ}} = 0 - p_{\text{пад}} = -p$; изменение импульса всех $\dot{N}/2$ поглощённых фотонов равно $\Delta p = -p \cdot \dot{N}/2$. Соответственно, поглощённые фотоны действуют на батарею с силой $F_2 = (h\nu/c)\dot{N}/2$.

Суммарная сила на солнечную батарею со стороны всех (и отраженных, и поглощенных) фотонов равна тогда $F = F_1 + F_2 = 3(h\nu/c)\dot{N}/2$ (*). Полное число \dot{N} всех падающих на батарею за 1 с фотонов найдем по формуле для мощности излучения, падающего на 1 м^2 поверхности: $I = \frac{\dot{N} \cdot h\nu}{S}$ (**),

откуда получаем $\dot{N} = \frac{I \cdot S}{h\nu}$. Согласно (*) находим выражение для силы, дей-

ствующей на батарею $F = \frac{3 IS}{2 c}$ (***) . Подстановка числа даёт значение силы

$F = 3,5 \times 10^{-4} \text{ Н} = 350 \text{ мкН}$. Мы получили очень небольшую величину. (Опыты Лебедева, изучавшего давление света, были чрезвычайно тонкими!) Световое давление, однако, не всегда мало. Например, в атомной бомбе давление излучения порядка $10^{11} \text{ атм} \approx 10^{16} \text{ Па}$.

Замечание. При выводе формулы $F = \frac{3 IS}{2 c}$ (***) мы рассуждали о фото-

нах определённой частоты ν (определённой длины волны λ). Но световая волна от Солнца содержит широких спектр (набор) фотонов различной частоты! Строго говоря, формула (***) справедлива для каждой компоненты в

спектре излучения (со своей частотой). Но интенсивность в световой волне от Солнца равна сумме интенсивностей различных компонент спектра (волны с разными частотами не интерferируют друг с другом): $I = I_{\nu_1} + I_{\nu_2} + I_{\nu_3} + \dots$. Просто складываются друг с другом поэтому и силы на солнечную батарею станции со стороны фотонов разной частоты, летящих от Солнца: $F = F_{\nu_1} + F_{\nu_2} + F_{\nu_3} + \dots$

§4. Волны де Бройля

В 1924 г. Луи де Бройль высказал гипотезу, что волновыми свойствами обладают не только фотоны, но и все частицы вообще. Поначалу эта идея казалась совершенно абсурдной, и только высокое происхождение спасло де Бройля от «побития камнями». Эйнштейн же поддержал идею! Де Бройль распространил формулы Планка – Эйнштейна для энергии $\mathcal{E} = h\nu$ и для импульса

$$p = h / \lambda \quad (4.1)$$

на любые частицы. Было, правда, не понятно, что колеблется в волне де Бройля. (Что понимать под частотой для шарика? Что такое длина волны для него?) В случае звука всё понятно – колеблются частицы воздуха, в случае света – напряжённости электрического и магнитных полей. А **что** в случае частицы? Была гипотеза, что так, периодически в пространстве и во времени, изменяется плотность, например, электрона (мол, электрон – не точка, а что-то более или менее размазанное в пространстве). Но эта гипотеза не выдержала «испытания на прочность». Тем не менее, спустя всего лишь год после появления гипотезы де Бройля экспериментаторам удалось наблюдать дифракцию электронов! Тем самым, было доказано прямым способом, что с электроном связан некий волновой процесс. Но **какой?** Всё-таки, волны де Бройля – это волны **чего?** – Физики ещё долго об этом спорили, притом, очень горячо. (В чём-то ситуация здесь напоминает ситуацию с теорией Френеля дифракции света: он многое объяснил, но неправильно понимал, **что такое** световая волна. Это волна **чего?** Гению было достаточно и неправильного понимания!)

После работ де Бройля в физике утвердился корпускулярно-волновой дуализм для всех частиц материи. Физики по-прежнему во многих случаях рассуждали, например, об электроне, как о малюсеньком шарике (даже – точке), но в некоторых случаях (таких как дифракция электронов) приходилось рассуждать о нём как о волне. Аналогично – с другими частицами (протонами, нейтронами). По современным представлениям (Борн, 1926) волна де Бройля – это, грубо говоря, волна вероятности того, что частицу можно найти в заданной точке пространства. Шредингер в 1926 г. существенно развил идею де Бройля: он показал, как можно вычислять дебройлевскую волну электрона в различных физических ситуациях. В результате появилась квантовая теория атомов, молекул, кристаллов (металлов и полупроводников), ... Появились транзисторы, микросхемы, компьютеры, мобильники и всё, всё, всё!

Пример 4.1. Какой кинетической энергией должны обладать электрон и нейтрон, чтобы их длины волны де Бройля были равны $0,1 \text{ нм} = 10^{-10} \text{ м}$? (Эта длина порядка размеров атомов большинства химических элементов.) Массы электрона и нейтрона равны $m = 0,911 \times 10^{-30} \text{ кг}$ и $M = 1,67 \times 10^{-27} \text{ кг}$. Сравнить также импульсы частиц.

Решение. Для электрона

$$K_e = \frac{p^2}{2m} = \frac{(h/\lambda)^2}{2m} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 0,911 \cdot 10^{-30} (10^{-10})^2} = 2,41 \cdot 10^{-17} \text{ Дж} = \\ = \frac{2,41 \cdot 10^{-17}}{1,60 \cdot 10^{-19}} \text{ эВ} \approx 150 \text{ эВ}.$$

Эта энергия много меньше энергии покоя электрона mc^2 (примерно равной $0,5 \text{ МэВ}$), поэтому мы вправе были пользоваться нерелятивистской формулой для кинетической энергии.

Для нейтрона получаем кинетическую энергию еще меньше:

$$K_n = \frac{(h/\lambda)^2}{2M} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} (10^{-10})^2} \approx 1,3 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} \approx 0,08 \text{ эВ}.$$

Импульсы частиц равны друг другу, т.к. вычисляются по одной и той же формуле де Бройля $p = h/\lambda$ (4.1) для одной и той же длины волны.

Пример 4.2. Электроны в рентгеновской трубке ускоряются разностью потенциалов $U = 10 \text{ кВ}$. Оценить длину волны де Бройля электрона.

Решение. Кинетическая энергия, которую приобретает электрон, равна $eU = 25 \text{ кэВ} = 2,5 \times 10^4 \text{ эВ}$ много меньше энергии покоя электрона (примерно $0,5 \text{ МэВ} = 5 \times 10^5 \text{ эВ}$), поэтому можно пользоваться формулами механики Ньютона (а не теории относительности):

$$eU = \frac{p^2}{2m} = \frac{(h/\lambda)^2}{2m},$$

откуда находим $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \approx 1,23 \times 10^{-11} \text{ м}$. Эта длина меньше размеров самого маленького атома (диаметр атома гелия порядка $0,6 \times 10^{-10} \text{ м}$).

Пример 4.3. Почему макроскопические объекты (даже и очень маленькие) не показывают волновых свойств? Оценить среднеквадратичную скорость капельки тумана с радиусом $0,1 \text{ мкм}$, взвешенной в воздухе при комнатной температуре. Оценить длину волны де Бройля такой капельки.

Решение. Среднеквадратичная скорость $v_{\text{ср.кв.}}$ капельки массой m связана с

температурой T соотношением $\frac{mv_{\text{ср.кв.}}^2}{2} = \frac{3}{2}kT$, где $k \approx 1,38 \times 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – по-

стоянная Больцмана. Отсюда находим скорость $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, где

$$m = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3 - \text{плотность воды}).$$

Подставляя $r = 10^{-7}$ м, получаем массу капли $m \approx 4,2 \times 10^{-18}$ кг; для средне-квадратичной скорости тогда при $T = 300$ К получаем оценку $v_{\text{ср.кв.}} \approx 0,054$ м/с $\approx 5,4$ см/с. Этой скорости соответствует импульс $p = m v_{\text{ср.кв.}}$, а по формуле де Бройля этому импульсу отвечает длина волны

$$\lambda = \frac{h}{mv_{\text{ср.кв.}}} \approx 2,9 \times 10^{-15} \text{ м.}$$

Это – очень маленькая длина: она много меньше размеров самых маленьких атомов (порядка 10^{-10} м). Она даже меньше размеров атомных ядер. Волны де Бройля (как и любые другие волны) могли бы проявить себя в опытах по интерференции или дифракции. Но для этого размеры объектов, на которых бы они дифрагировали, должны быть сопоставимы с длиной волны. Понятно, что весьма затруднительно построить объект размером меньше атомного ядра. Поэтому частицы с такими маленькими длинами волн, как у капель тумана, просто никак не могут проявить своих волновых свойств.

§5. Планетарная модель атома Резерфорда и теория атома водорода Бора

Исторически первой моделью атома была, по-видимому, модель атома Томсона (1902). В ней предполагалось, что в простейшем атоме – атоме водорода – положительный заряд, равный по модулю заряду электрона, равномерно распределён внутри шара радиусом порядка $R = 10^{-10}$ м, а электрон в невозбужденном атоме покоится в центре шара. Роль положительного заряда была пассивной: он всегда покоился, – двигался (колебался) лишь электрон. Однако эта модель не смогла объяснить основных закономерностей излучения и поглощения света атомами (см. Пример 5.1).

На смену модели Томсона пришла модель атома, предложенная Резерфордом (1911). Согласно этой модели атом похож на солнечную систему: в центре располагается очень маленькое по размеру положительно заряженное атомное ядро (диаметром порядка 10^{-14} м), вокруг которого вращаются, как планеты по орбитам, отрицательно заряженные электроны. Масса ядра много больше массы электронов, что позволяет считать ядро в первом приближении неподвижным. Радиусы орбит и размеры атомов порядка 10^{-10} м, т. е., грубо говоря, на 4 порядка больше размеров ядра. Последнее обстоятельство позволяет говорить о почти точечном ядре. В нормальном состоянии положительный заряд ядер по модулю в точности равен суммарному отрицательному заряду всех элек-

тронов атома, – так что в целом атом электрически нейтрален. При отрыве электрона от атома возникает ион – положительно заряженная частица.

Модель Резерфорда многое прояснила, – например, в экспериментах по рассеянию так называемых α – частиц (ядер атомов гелия). Но у неё (как и у её предшественницы – модели Томсона) был один существенный изъян: физики знали, что при любом ускоренном движении заряженной частицы она будет излучать электромагнитное излучение, а излучая, терять энергию. Поэтому электрон в атоме, двигаясь по непрямым траекториям, т. е. ускоренно, довольно быстро должен просто упасть на ядро. Но этого **не** происходит! Почему? Не понятно.

Некое решение проблемы в 1913 г. предложил Бор. Его теория атома водорода в модели Резерфорда была почти квантовой. Почему «**почти** квантовой»? Дело в том, что местами теория была практически ньютоновской. Однако на движение электрона насильственно накладывались некие квантовые условия. Скорее всего, от такого странного гибрида классических и квантовых представлений просто отмахнулись бы, **но** теория блестяще описывала экспериментальные данные (по крайней мере, для атома водорода). А от этого не отмахнёшься!

Бор постулировал (предположил), что если электрон в атоме движется по неким избранным (стационарным) орбитам, то он не излучает. (Почему-то!) Излучение происходит лишь при переходах электронов с одной орбиты на другую. Бор постулировал, что при переходах с одной стационарной орбиты на другую электрон излучает квант света, частота излучения которого определяется (в духе Планка и Эйнштейна) из формулы

$$\hbar\omega = E_{нач} - E_{конечн}. \quad (5.1)$$

Атом может не только излучать, но и поглощать кванты света. При этом происходит переход электрона с орбиты с меньшей энергией на орбиту с большей; для этого частота поглощенного атомом излучения ω должна удовлетворять условию:

$$\hbar\omega = E_{конечн} - E_{нач}. \quad (5.1')$$

Как определить эти выделенные (стационарные) орбиты электронов в атоме?

Основы теории Бора атома водорода таковы. Считается, что в электрически нейтральном атоме водорода в центре располагается протон с положительным зарядом $Q = +e$, где $e = 1,602 \times 10^{-19}$ Кл – так называемый элементарный заряд, вокруг которого движется отрицательно заряженный электрон с зарядом $q = -e$. Единственная сила между ними – сила кулоновского притяжения, сообщающая электрону центростремительное ускорение. В простейшем случае движение будет происходить по круговой орбите (после Бора физиками рассматривались и другие орбиты – эллиптические). В уравнении движения электрона

$$\frac{mv^2}{R} = k \frac{e^2}{R^2}, \quad (5.2)$$

где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ Н м}^2/\text{Кл}^2$, имеем пока две неизвестные – скорость

электрона v и радиус орбиты R . Бор дополнил классическое уравнение (5.2) квантовым условием: момент импульса электрона на стационарных орбитах кратен перерезкнутой постоянной Планка:

$$mvR = n\hbar, \quad (5.3)$$

где $\hbar = h/(2\pi) \approx 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \times \text{с}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, по предположению Бора, имеется счётное число особых, выделенных условием (5.3), орбит. Чтобы получить конкретные значения радиусов орбит, скоростей электронов на них и возможные значения энергий электронов в атоме, нужно решить систему уравнений (5.2) – (5.3).

Разделим уравнение (5.2) на уравнение (5.3) (левую часть – на левую, правую – на правую). В результате сразу получаем набор всех возможных скоростей электрона в атоме водорода:

$$v_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{n}. \quad (5.4)$$

Подставляя (5.4) в (5.3), находим набор возможных радиусов орбит электрона:

$$R_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} n^2. \quad (5.5)$$

Энергия электрона складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром (кинетической энергией ядра пренебрегаем, считая его практически покоящимся):

$$E = \frac{mv^2}{2} - k \frac{e^2}{R} = -k \frac{e^2}{2R}$$

(учтено уравнение (5.2)). Окончательно получаем:

$$E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2} \quad (5.6)$$

(*) Пример 5.1. В модели атома Томсона (1902г.) предполагалось, что в атоме водорода положительный заряд, равный по модулю заряду электрона, равномерно распределён внутри шара радиусом порядка $R = 10^{-10}$ м. В невозбуждённом атоме электрон покоится в центре шара. Чему равен период колебаний электрона при малом его смещении из центра? Считать, что колебания происходят вдоль диаметра внутри шара.

Решение. При отклонении электрона из центра на расстояние $r < R$, на электрон будет действовать сила со стороны лишь части положительного за-

ряда, ограниченного сферой радиуса r . Величина этого заряда равна $q(r) = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$, где ρ – объёмная плотность заряда, которую можно найти по

формуле $\rho = \frac{e}{\frac{4\pi}{3} R^3}$. В итоге, $q(r) = \frac{r^3}{R^3} e$. На электрон при его отклонении от

центра на расстояние r начнет действовать сила, равная по величине $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e \cdot q(r)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{R^3} r$ и направленная к центру, т. е. возникнет возвращающая сила, пропорциональная величине отклонения от положения равновесия – в точности, как в случае гармонического осциллятора.

Роль коэффициента жесткости при этом играет величина $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{R^3}$. Тогда

по формуле для периода колебаний $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ находим частоту колебаний

$$\nu = \frac{1}{T} \approx 2,5 \times 10^{15} \text{ Гц.}$$

Итак, по модели Томсона электрон в атоме колеблется с одной единственной частотой (у гармонического осциллятора иного быть не может). Ей соответствует длина волны излучения $\lambda = c / \nu \approx 0,1$ мкм. В действительности, в экспериментах видят, что атом водорода излучает свет многих разных частот. Это и вынудило физиков отказаться от модели Томсона.*

Пример 5.2. Оценить скорость электрона на 1-ой борновской орбите. Во сколько раз она меньше скорости света в вакууме?

Решение. По формуле (5.4) имеем $v_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar} \approx 2,2 \times 10^6$ м/с. Эта ско-

рость примерно в 137 раз меньше скорости света в вакууме. Именно поэтому теория атома основывается на нерелятивистской механике. (Релятивистские эффекты в ней всё же бывают важны. Но это существенно выходит за рамки школьной физики.)

Пример 5.3. Во сколько раз уменьшится радиус орбиты электрона в атоме водорода, если при переходе атома из одного стационарного состояния в другое кинетическая энергия электрона увеличивается в 16 раз?

Решение. Согласно формуле (5.2) кинетическая энергия электрона $\frac{mv^2}{2} = k \frac{e^2}{2R}$ обратно пропорциональна радиусу орбиты электрона: увеличению в 16 раз кинетической энергии электрона может привести лишь 16-тикратное уменьшение радиуса орбиты.

Пример 5.4. Каков номер возбужденного состояния, в которое переходит атом водорода из нормального состояния при поглощении фотона, энергия которого составляет $8/9$ энергии ионизации атома водорода?

Решение. Энергией ионизации называют минимальную энергию, которую нужно сообщить электрону, находящемуся в состоянии с наименьшей энергией (говорят: в основном состоянии), чтобы он, преодолев силы притяжения со стороны ядра, покинул атом. Потенциальная энергия электрона при удалении его на бесконечность обращается в нуль. Нулю же будет равна и кинетическая энергия электрона (по условию минимальности затрат энергии). В атоме водо-

рода согласно формулам (5.6) $I = |E_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2R_1}$.

По условию задачи энергия фотона равна $E_n - E_1 = \frac{8}{9}|E_1|$, откуда

$$E_n = \frac{8}{9}|E_1| + E_1 = \frac{8}{9}|E_1| - |E_1| = -\frac{1}{9}|E_1| = \frac{E_1}{3^2}, \text{ т. е. } n = 3.$$

Пример 5.5. Какие спектральные линии водорода могут появиться, если его облучать электронами с энергией $12,5$ эВ?

Решение. Оценим разности энергий. Полагая $E_1 \approx -13,6$ эВ $\equiv -I$, имеем

$$E_n = -I/n^2, \quad E_2 - E_1 = \frac{3}{4}I \approx 10,2 \text{ эВ},$$

$$E_3 - E_1 = \frac{8}{9}I \approx 12,1 \text{ эВ}, \quad E_4 - E_1 = \frac{15}{16}I \approx 12,8 \text{ эВ},$$

остальные разности энергий будут ещё больше. Лишь первые две разности энергий оказались меньше энергии налетающих электронов ($12,5$ эВ). Поэтому из основного состояния ($n = 1$) электроны атома электронным ударом налетающих электронов могут быть возбуждены лишь до состояний с $n = 2$ и $n = 3$. Эти возбужденные электроны спустя короткое время будут опускаться вниз по энергии: из состояния $n = 2$ прямо в состояние с $n = 1$, а из состояния с $n = 3$ двумя возможными путями – либо прямо в состояние с $n = 1$, либо – в два прыжка вниз – сначала в состояние с $n = 2$, а уже из него в состояние с $n = 1$. В результате: возможны излучения 3-х квантов света с частотами

$$\nu_{32} = \frac{E_3 - E_2}{h}, \quad \nu_{21} = \frac{E_2 - E_1}{h} \quad \text{и} \quad \nu_{31} = \frac{E_3 - E_1}{h}. \quad \text{Им будут соответствовать}$$

$$\text{длины волн излучения: } \lambda_{32} = \frac{c}{\nu_{32}} = 658 \text{ нм}, \quad \lambda_{21} = \frac{c}{\nu_{21}} = 122 \text{ нм}, \quad \lambda_{31} = \frac{c}{\nu_{31}} =$$

$$= 103 \text{ нм}.$$

Пример 5.6. В рамках теории Бора определить радиус наименьшей орбиты электрона в ионе He^+ .

Решение. В уравнении движения электрона $\frac{mv^2}{R} = k \frac{e^2}{R^2}$ (5.2) и в формуле для энергии $E = \frac{mv^2}{2} - k \frac{e^2}{R} = -k \frac{e^2}{2R}$ (5.6) нужно заменить заряд протона e на заряд ядра Ze (для гелия $Z = 2$). В результате, для скоростей электрона на стационарных орбитах получаем формулу

$$v_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{\hbar} \frac{1}{n}, \quad (5.4')$$

для радиусов орбит

$$R_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{Zme^2} n^2, \quad (5.5')$$

а для возможных значений энергий

$$E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{Z^2 me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad (5.6')$$

Полагая, $Z = 2$ и $n = 1$ (наименьшая орбита; основное состояние), получаем числовые значения этих величин: $v_{1\text{He}} \approx 4,4 \times 10^6 \text{ м/с}$, $R_{1\text{He}} \approx 0,26 \times 10^{-10} \text{ м}$ и $E_{1\text{He}} \approx -54,4 \text{ эВ}$.

(*) **Пример 5.7.** В рамках теории Бора определить радиус атома гелия, считая, что в нём два электрона движутся по одной окружности, находясь всё время в диаметрально противоположных точках окружности.

Решение. Запишем уравнение движения какого-нибудь из электронов атома, учтя его притяжение ядром с зарядом $+2e$, находящимся на расстоянии R от него, и отталкивание от 2-го электрона атома, расположенного уже на вдвое большем расстоянии:

$$\frac{mv^2}{R} = k \frac{2e^2}{R^2} - k \frac{e^2}{(2R)^2}, \quad (5.7)$$

где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, откуда

$$mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{7e^2}{4R}. \quad (5.7')$$

Дополним это уравнение условием на момент импульса одного электрона. На самой низшей орбите (которой мы только и будем интересоваться) имеем

$$mvR = \hbar. \quad (5.8)$$

Деля уравнение (5.7') на (5.8), получаем скорость электрона на низшей орбите

$$v = \frac{7}{4} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar}. \quad (5.9)$$

Подставляя (5.9) в (5.8), находим радиус самой маленькой орбиты электрона в атоме гелия:

$$R = \frac{4}{7} \cdot 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad (5.10)$$

что составляет $4/7$ от радиуса электрона в атоме водорода. Подстановка числовых значений дает $R \approx 0,30 \times 10^{-10}$ м, что с замечательной точностью совпадает со значением для R , полученным строгими методами.*

§6. Ядерная физика

Протонно-нейтронное строение атомных ядер. Изотопы. По современным представлениям ядра атомов состоят из положительно заряженных протонов и электрически нейтральных нейтронов, массы каждого из которых примерно равны друг другу и значительно превосходят массу электрона (в 1836 и 1839 раз соответственно). Ввиду близости масс протона и нейтрона, $m_p \approx m_n \approx 1,67 \times 10^{-27}$ кг, их объединяют общим названием «нуклон» (от английского слова *nuclei* – ядро). Соотношение между числом протонов Z и числом $(A - Z)$ нейтронов в ядре ${}_Z^A X$, где A – общее число нуклонов в ядре (массовое число) данного химического элемента X , может варьироваться в некоторых (не слишком широких) пределах.

Атомы, ядра которых содержат одинаковое число протонов (а потому и одинаковое число электронов), но разное число нейтронов, называют изотопами химического элемента. Например, ядра изотопов углерода ${}_{6}^{12}\text{C}$ и ${}_{6}^{14}\text{C}$ содержат одинаковое число протонов $Z = 6$, но разное число нейтронов: $12 - 6 = 6$ и $14 - 6 = 8$ соответственно. Ядра ${}_{6}^{12}\text{C}$ стабильны, ядра ${}_{6}^{14}\text{C}$ не стабильны (радиоактивны). Другой пример: известны 3 изотопа водорода – ${}^1\text{H}$, ${}^2\text{H} = \text{D}$ (дейтерий, его ядро называется дейтроном) и ${}^3\text{H} = \text{T}$ (тритий, его ядро называется тритоном). Дейтрон состоит из протона и нейтрона, тритон – из протона и двух нейтронов. Первые два изотопа водорода стабильны, 3-й не стабилен. Конкретные ядра атомов веществ называют **нуклидами**; ядра радиоактивных изотопов – **радионуклидами**.

Размеры ядер. Радиус атомного ядра с массовым числом A можно оценить по формуле $R = 1,3A^{1/3} \times 10^{-15}$ м. Между протонами в ядре существует сильное электростатическое отталкивание. Удерживают их вместе в малом объеме ядра так называемые ядерные силы.

Превращения ядер. Кроме довольно многочисленных стабильных ядер, в природе существует большое число (а ещё больше получено искусственно) нестабильных ядер, которые самопроизвольно превращаются в другие ядра (говорят: распадаются).

α – **распад ядер.** При α – распаде исходное материнское ядро испускает ядро гелия ${}^4\text{He}$ (α – частицу) и превращается в дочернее ядро, числа протонов и нейтронов у которого уменьшаются на две единицы каждое. Спонтанному (без внешнего воздействия) α – распаду подвержены тяжёлые ядра с $Z > 83$ и небольшая группа редкоземельных элементов в области $A = 140 - 160$.

β – *распад ядер* – процесс самопроизвольного превращения ядра в ядро с тем же значением A , но с изменением Z на $\Delta Z = \pm 1$ за счёт испускания электрона (или позитрона – частицы, отличающейся от электрона лишь знаком электрического заряда), – или захвата электрона с атомной оболочки.

Деление ядер характерно только для самых тяжёлых ядер, начиная от тория ($Z = 90$) и далее в сторону больших Z . Впервые деление ядер наблюдали и дали правильную трактовку эксперименту Ган и Штрассман (1938). Опыты были проведены с ядрами урана ($Z = 92$), которые бомбардировались *медленными* нейтронами. В результате образовывалась пара ядер с примерно равными массами, а в качестве «мелких брызг» вылетали два-три нейтрона. Последние имеют достаточно большие энергии и чаще всего не вызывают деления соседних ядер урана (подчеркнём: лучше всего деление урана происходит под действием медленных, а не быстрых нейтронов). Однако, если эти «два-три нейтрона» замедлить, они уже легко вызывают деление других ядер. Так возникает *цепная реакция* деления.

Термоядерный синтез лёгких элементов. При высоких температурах (порядка 10^7 К) возможны реакции слияния легких ядер с образованием более тяжёлых ядер. Высокие температуры необходимы, потому что все ядра заряжены положительно, и для сближения ядер друг к другу требуется преодолеть силы электростатического отталкивания ядер друг от друга. В термоядерных реакциях происходит значительное выделение энергии, с избытком компенсируя начальные затраты энергии (получение высоких температур).

Энергия связи. По определению энергией связи $E_{\text{св}}$ называют минимальную энергию, которую нужно сообщить ядру, чтобы полностью расщепить его на составляющие это ядро Z протонов и $N = A - Z$ нейтронов. Она равна разности

$$E_{\text{св}}(Z, A) = (Zm_p + Nm_n - M_{\text{ядро}}(Z, A))c^2$$

Закон радиоактивного распада. Ядра радиоактивных изотопов элементов самопроизвольно распадаются с превращением в ядра изотопов других элементов. (Например, ядра изотопа углерода ^{14}C в результате β – распада превращаются в ядра изотопа азота ^{14}N .) Первые из них называют материнскими (или родительскими) ядрами, а ядра вторых – дочерними.

В результате самопроизвольных распадов радиоизотопа число $N(t)$ его ещё не распавшихся ядер с течением времени непрерывно уменьшается. Изменение числа не распавшихся ядер за малое время dt пропорционально числу этих не распавшихся ядер

$$dN = -\lambda N dt, \tag{6.1}$$

где λ – постоянная распада размерности $1/c$. Решая уравнение (6.1), находим зависимость числа не распавшихся ядер от времени

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{6.2}$$

где N_0 – число ядер в начальный момент времени $t = 0$. Если значения N_0 и λ известны, то по измеренному значению $N(t)$ можно найти время, в течение которого происходил распад

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{N_0}{N(t)} \right). \quad (6.3)$$

На этом основан метод определения «возраста» пород в геологии и «возраста», например, артефактов (продуктов деятельности человека) – в археологии. Использование этого метода предполагает, что ни материнские, ни дочерние ядра не исчезают и не появляются иначе как в результате самого радиоактивного процесса.

Удобной характеристикой радиоактивного распада является *период полураспада*. Так называют время T (в литературе чаще используется более громоздкое обозначение $T_{1/2}$), в течение которого количество не распавшихся ядер уменьшается вдвое: $N(T) = N_0 / 2$, т. е. $N_0 e^{-\lambda T} = N_0 / 2$, откуда, логарифмируя, получаем соотношение между константой распада и периодом полураспада

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda}. \quad (6.4)$$

Пользуясь понятием периода полураспада, закон радиоактивного распада можно представить в виде

$$N(t) = N_0 \times 2^{-t/T}. \quad (6.2')$$

Активностью радиоизотопа называют величину

$$A = -dN / dt, \quad (6.5)$$

определяющую интенсивность распадов (число распадов в единицу времени). С учётом (6.1) и (6.2) находим

$$A = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (6.6)$$

т. е., не только число не распавшихся ядер, но и их активность экспоненциально убывает со временем,

$$A_0 = \lambda N_0 \quad (6.7)$$

– активность в начальный момент времени $t=0$.

Для определения времени t в методах датирования, кроме формулы (6.3), может быть использована формула

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{A_0}{A(t)} \right), \quad (6.8)$$

при этом экспериментально измеряются активности A_0 и $A(t)$. Последнее время отдадут предпочтение прямому измерению $N(t)$ и формуле (6.3) (как методу более точному и требующему меньших затрат времени).

Пример 6.1. В цепочке радиоактивных превращений после 5 бета-распадов и нескольких альфа-распадов, ядро тяжёлого элемента превращается в ядро устойчивого атома, порядковый номер которого на 13 меньше первоначального. На сколько меньше первоначального становится массовое число ядра?

Решение. Пусть N_α и N_β – числа α - и β -распадов в цепочке. Тогда изменение зарядового числа ядра (порядкового номера элемента) $\Delta Z = -2N_\alpha + N_\beta = -2N_\alpha + 5 = -13$, откуда находим $N_\alpha = 9$. Изменение массового числа $\Delta A = -4N_\alpha = -36$.

Пример 6.2. Период полураспада радиоактивного изотопа иода ${}_{53}^{131}\text{I}$ составляет $T = 8$ суток. За какое время t число ядер этого изотопа уменьшится в 100 раз?

Решение. По формуле $(6.2') 2^{-t/T} = 1/100$, откуда $t = T \log_2 100 \approx 53$ сут.

Пример 6.3. При прохождении потока нейтронов через пластинку свинца толщиной $d_1 = 1$ мм количество частиц уменьшилось на $\eta = 15\%$. Найти долю δ нейтронов, проходящих через пластинку свинца толщиной $d_2 = 10$ мм.

Решение. Доля частиц, прошедших пластинку d_1 , составляет $1 - \eta = 0,85$. Если за первой пластинкой поставить точно такую же вторую, то через нее пройдет 85% от прошедших первую пластинку, т.е. $(1 - \eta)^2 \approx 0,72$ (72%) от начального числа нейтронов. Если поставить одну за другой 10 пластинок d_1 ($d_2 = 10 d_1$), то через них пройдет $(1 - \eta)^{10} = (0,85)^{10} \approx 0,20$ (20%) от числа частиц в исходном потоке.

Пример 6.4. Мощность реактора постоянна и равна $P = 1$ МВт. За какое время первоначальная масса $m_0 = 10$ кг урана ${}_{92}^{235}\text{U}$ уменьшится на 2%? В одном акте деления высвобождается энергия $W \approx 190$ МэВ? Постоянная Авогадро $N_A = 6 \times 10^{23}$ моль $^{-1}$, $1 \text{ эВ} = 1,6 \times 10^{-19}$ Дж.

Решение. Энергия, полученная в реакторе за время t , равная $P \times t$, может быть выражена через энергию, высвобождаемую в одном акте деления W и число N распавшихся за это время ядер урана ${}_{92}^{235}\text{U}$: $P \times t = W \times N$. Последнее число связано с уменьшением на $|\Delta m| = 0,02 m_0$ первоначальной массы урана m_0 и массой одного атома урана $m_1 = \mu / N_A$, где $\mu = 235 \times 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса урана-235, $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ 1/моль – число Авогадро:

$$N = \frac{|\Delta m|}{m_1} \approx 5,12 \times 10^{23}$$
 В итоге $t = \frac{W \cdot N}{P} = \frac{5,12 \cdot 10^{23} \cdot 190 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{10^6} = 1,56 \times 10^7 \text{ с} \approx 180 \text{ суток} \approx 0,5 \text{ года}$.

Пример 6.5. Сколько энергии выделяется в реакции ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} = {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$? Массы частиц равны: дейтерия 2,01410 а.е.м., трития 3,01605 а. е. м., гелия-4 4,00260 а. е. м., нейтрона 1,00866 а. е. м., $1 \text{ а. е. м.} \times c^2 = 931,50 \text{ МэВ}$.

Решение. Выделившаяся энергия равна
 $E = (2,01410 + 3,01605 - 4,00260 - 1,00866) \times 931,50 \text{ МэВ} = 17,6 \text{ МэВ}$.

Пример 6.6. Термоядерная реакция ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} = {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$ идет с выделением энергии $Q = 17,6$ МэВ. Найти распределение энергии между продуктами реакции. Кинетическими энергиями дейтерия и трития до реакции пренебречь (по сравнению с выделившейся энергией). Считать, что масса протона примерно равна массе нейтрона $m_n \approx 4m_p$, а масса ядра гелия $M \approx 4m_p$.

Решение. Выделившаяся энергия порядка 10^7 эВ значительно меньше энергии покоя частиц (последняя порядка $m_p c^2 \approx 10^9$ эВ, т. е. на 2 порядка больше). Это позволяет вести рассмотрение в рамках нерелятивистской механики Ньютона.

Запишем для реакции закон сохранения импульса в системе отсчета, в которой до реакции суммарный импульс равнялся нулю, $0 = 4mu + mV$ (*) и выражение для кинетической энергии продуктов распада $\frac{4mu^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = Q$ (**).

Решая систему уравнений (*) и (**), находим $\frac{4mu^2}{2} = \frac{1}{5}Q \approx 3,5$ МэВ и $\frac{mV^2}{2} = \frac{4}{5}Q \approx 14,1$ МэВ, т. е. 80% энергии уносится более легкой частицей.

Контрольные вопросы

1. Определите постоянную дифракционной решётки, если при нормальном падении света на решетку зеленая линия спектра лампы (длина волны 550 нм) наблюдается в 5-м порядке под углом 30° .

2. Вычислите и сравните энергии рентгеновского кванта с длиной волны 0,1 нм и электрона, которому соответствует волна де Бройля с такой же длиной.

3. Дождевая капля диаметром 1 мм падает в воздухе со скоростью 4,7 м/с. Вычислите соответствующую ей дебройлевскую длину волны. Почему в повседневной жизни мы не наблюдаем волновые проявления макроскопических объектов?

4. Электрон в атоме водорода находится в состоянии с $n = 3$ (модель атома водорода по Н. Бору). Вычислите отношение дебройлевской длины волны электрона к длине третьей боровской орбиты.

5. Вычислите отношение радиусов 1-й и 10-й боровской орбит электрона в атоме водорода. Вычислите отношение скоростей электрона на этих орбитах.

6. За время 150 секунд распалось $7/8$ первоначального числа радиоактивных ядер. Вычислите период полураспада ядра.

7*. Какую энергию, следует сообщить находящимся на большом расстоянии друг от друга ядрам дейтерия, для того, чтобы они сблизилась до расстояния порядка 10^{-14} м, когда становится возможной реакция слияния этих ядер в ядро гелия. Дейтерий – изотоп водорода, ядро которого состоит из 1 протона и 1 нейтрона.

Задачи

1. Плоская стеклянная поверхность покрыта тонкой плёнкой ацетона ($n = 1,25$). На плёнку по нормали падает белый свет. В результате интерференции волн, отражённых от наружной и внутренней поверхностей плёнки практически полностью гасится свет с длиной волны $\lambda_1 = 600$ нм и максимально усиливается свет с $\lambda_2 = 700$ нм. Найдите минимальную толщину пленки. Показатель преломления стекла $\tilde{n} = 1,5$.

2. При нормальном падении монохроматического света на дифракционную решётку первый дифракционный максимум наблюдают под углом $\varphi_1 = 6,9^\circ$, а последний – под углом 74° . Вычислите наибольший порядок спектра.

3*. Неподвижные невозбуждённые атомы водорода облучаются пучком электронов. При какой минимальной энергии электрона атом может излучить фотон в результате неупругого столкновения с электроном? Энергия ионизации атома водорода равна 13,6 эВ.

4*. Рассмотрим модель атома гелия, в которой два электрона движутся по одной окружности, находясь, всё время в диаметрально противоположных точках окружности. Примем, что на этой окружности выполняется боровское правило квантования с $n = 1$. Оцените энергию, необходимую для удаления одного электрона из атома, считая что оставшийся электрон окажется в состоянии с наименьшей энергией для однозарядного иона гелия.

5. В результате нескольких альфа-распадов и такого же числа бета-распадов нестабильное ядро превращается в стабильное, а число нейтронов в ядре уменьшается на 27. Вычислите суммарное число распадов в этой цепочке радиоактивных превращений.

6. Для определения периода полураспада короткоживущего изотопа использовался счетчик импульсов. За минуту в начале наблюдения было зарегистрировано $\Delta n_0 = 250$ импульсов, а через время $\tau = 1$ ч за одну минуту счетчик зарегистрировал $\Delta n = 92$ импульса. Определите период полураспада изотопа.

7. При захвате нейтрона ядром лития происходит ядерная реакция: ${}^6\text{Li} + n = {}^3\text{H} + {}^4\text{He}$, в которой выделяется энергия $Q = 4,8$ МэВ. Найдите распределение энергии между продуктами реакции. Считайте кинетическую энергию исходных частиц пренебрежимо малой.

8. Два ядра дейтерия образовали ядро ${}^4\text{He}$. Сколько энергии при этом выделилось? Масса дейтрона $m_D = 2,01410$ а. е. м., масса гелия $m_{\text{He}} = 4,0026$ а. е. м.. Одной атомной единице массы соответствует энергия 931,5 МэВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноуцан А.И. Краткий курс физики Под ред. А.А. Леоновича. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 224 с.

2. Козел С.М. Физика. 10-11 классы: пособие для учащихся и абитуриентов. В 2 ч. Ч.2. / С.М. Козел – М.: Мнемозина, 2010. – 400 с.